PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2012

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) a) Enuncia el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle.

b) Demuestra, usando el teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación $x^5 - 5x + 3 = 0$.

c) Demuestra, usando el teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas.

----

a)

El teorema de Rolle se puede enunciar del modo siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b) y si se cumple que f(α) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f'(x) = 0.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [α, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

b)

Se considera la función $f(x) = x^5 - 5x + 3$, que es continua y derivable en su dominio, que es el conjunto de los números reales.

Para demostrar lo pedido, basta con encontrar cuatro valores reales de x para los cuales los valores de la función $f(x) = x^5 - 5x + 3$ son, alternativamente, positivos y negativos, según el teorema de Bolzano.

Por ejemplo:

$f(-2) = -32 + 10 + 3 = -19 < 0$.　　　　$f(0) = 3 > 0$.

$f(1) = 1 - 5 + 3 = -1 < 0$.　　　　$f(2) = 32 - 10 + 3 = 25 > 0$.

La ecuación $x^5 - 5x + 3 = 0$ tiene tres soluciones reales que pertenecen, respectivamente, a los siguientes intervalos: $-2 < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < 2$.

c)

Siendo $f'(x) = 5x^4 - 5$, cuyas soluciones reales son las siguientes:

$5x^4 - 5 = 0$;; $x^4 - 1 = 0$. Esta ecuación solamente admite las soluciones reales $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

Por ser f(x) continua, solamente puede tener un máximo y un mínimo, con lo cual, sus puntos de corte con el eje X solamente pueden ser tres.

Siendo los puntos de corte p, q y r, tal que p < -1, -1 < q < 1 y r > 1, según el teorema de Rolle, en los intervalos (p, -1), (-1, q) y (1, r) solamente es posible una raíz real en cada uno de ellos, lo cual demuestra que la ecuación dada no puede tener más de tres raíces reales distintas.

****

2º) Calcula las siguientes integrales: $I_1 = \int sen^2 x \cdot \cos x \cdot dx$. $\qquad I_2 = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx$.

$$I_1 = \int sen^2 x \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} sen\ x = t \\ \cos x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = \int t^2 \cdot dt = \frac{t^3}{3} + C = \underline{\underline{\frac{1}{3} sen^3 x + C}}.$$

$$I_2 = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = dt \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2dt \end{array} \right\} \Rightarrow I_2 = 2\int e^t \cdot dt = 2e^t + C = \underline{\underline{2e^{\sqrt{x}} + C}}.$$

Otra forma de resolver esta integral es la siguiente:

$$I_2 = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{\sqrt{x}} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot dx = dt \\ \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2dt \end{array} \right\} \Rightarrow I_2 = 2\int dt = 2t + C = \underline{\underline{2e^{\sqrt{x}} + C}}.$$

****

3º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los siguiente determinantes:

$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix}$;; $\begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$, indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar la respuesta.

Se van a utilizar las siguientes propiedades:

.- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, su valor es cero.

.- Si todos los elementos de una fila o columna se descomponen en dos o más sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

.- Si los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & 2c \\ e & e & 2f \\ h & h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = \underline{\underline{-10}}.$$

$$\begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ 0+d+g & 0+e+h & 0+f+i \\ 0+0+g & 0+0+h & 0+0+i \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g & h & i \\ g & h & i \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0 + 0 + ghi \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ghi \cdot 0 = \underline{\underline{0}}.$$

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv x+y+2z=7$ y el punto P(1, 0, 0):

a) Calcula el punto Q de π que hace mínima la distancia a P.

b) Calcula el punto simétrico P' de P respecto del plano π.

----

a)

El punto Q pedido es la intersección de la recta r, perpendicular a π y que pasa por P, y el plano π.

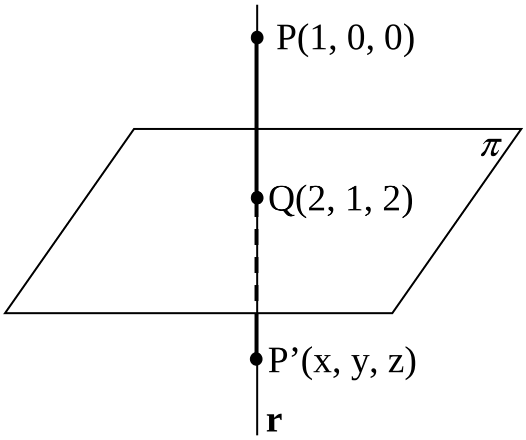
El vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal del plano π, que es $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 2)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x+y+2z-7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+\lambda+4\lambda-7=0 \;;;\; 6\lambda = 6 \;;;\; \lambda = 1 \Rightarrow \underline{\underline{Q(2,\ 1,\ 2)}}.$$

b)

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow Q - P = P' - Q \;;;$$

$$(2,\ 1,\ 2)-(1,\ 0,\ 0) = (x,\ y,\ z)-(2,\ 1,\ 2) \;;;$$

$$(1,\ 1,\ 2) = (x-2,\ y-1,\ z-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x-2=1 \to \underline{x=3} \\ y-1=1 \to \underline{y=2} \\ z-2=2 \to \underline{z=4} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'(3,\ 2,\ 4)}}.$$

****

PROPUESTA B

1º) Dada la función $f(x)=\frac{ax^2+b}{2x+6}$, calcula los parámetros α y b ε R sabiendo que:

-- f(x) tiene una asíntota oblicua de pendiente 2.

-- f(x) tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa x = 0.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y=mx+n$, siendo $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$m=2=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{2x+6}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{2x^2+6x}=2 \Rightarrow \underline{\underline{a=4}}.$$

La función resulta $f(x)=\frac{4x^2+b}{2x+6}$.

Por tener un mínimo relativo para x = 0 tiene que anularse su derivada para este valor:

$$f'(x)=\frac{8x\cdot(2x+6)-(4x^2+b)\cdot 2}{(2x+6)^2}=\frac{16x^2+16x-8x^2-2b}{(2x+6)^2}=\frac{8x^2+16x-2b}{(2x+6)^2}.$$

$$f'(0)=0 \Rightarrow \frac{-2b}{6^2}=0 \Rightarrow \underline{\underline{b=0}}.$$

****

2º) Calcula el área encerrada entra las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ y $g(x)=1$.

Los puntos de corte de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ y $g(x)=1$ son las soluciones de la ecuación que resulta de su igualación: $x^3-3x^2+2x+1=1$;; $x^3-3x^2+2x=0$.

$$x(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; x^2-3x+2=0 \;;;\; x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow \underline{x_2=1} \;;;\; \underline{x_2=2}.$$

Siendo $x\in(0,\ 1)$, por ejemplo x = ½, es:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+1+1=\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+2=\frac{1-6+16}{8}=\frac{17}{8}>1.$$

Siendo f(x) y g(x) funciones continuas y de dominio R, de lo anterior se deduce lo siguiente: $\begin{cases} x\in(0,\ 1) \Rightarrow\ f(x)>g(x) \\ x\in(1,\ 2) \Rightarrow\ f(x)<g(x) \end{cases}$, con lo que la superficie pedida es:

$$S=\int_0^1[f(x)-g(x)]\cdot dx+\int_1^2[g(x)-f(x)]\cdot dx=$$

$$=\int_0^1(x^3-3x^2+2x+1-1)dx+\int_1^2[1-(x^3-3x^2+2x+1)]dx=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_1^2=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_2^1=$$

$$=2\cdot\left[\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-0\right]-\left(\frac{2^4}{4}-2^3+2^2\right)=2\cdot\frac{1}{4}-(4-8+4)=\underline{\underline{\frac{1}{2}\,u^2=S}}.$$

****

3º) a) Discute el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax-3z=a \\ 2x+ay-z=a \end{cases}$ en función de α ε R.

b) Resuélvelo para el valor α = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -3 & a \\ 2 & a & -1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}=2\alpha^2-6+3a+a=2a^2+4\alpha-6=0 \;;;\; a^2+2a-3=0 \;;;\; a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=-1\pm 2 \Rightarrow \underline{\alpha_1=-3} \;;;\; \underline{\alpha_2=1}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{cases} a\neq -3 \\ a\neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er\min ado}}$$

$$Para\ a=-3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=-6-9-9=-24\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a=-3 \Rightarrow Rango\ M=2 \;;;\; Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ a=1\ es\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1+F_2=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ in\det er\min ado}}$$

b)

Para α = 1 el sistema es $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-3z=1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando, por ejemplo, la primera ecuación y parametrizando z = λ:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x=1+3\lambda} \\ 2x+y=1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y=1+\lambda-2x=1+\lambda-2-6\lambda \;;;\; \underline{y=-1-5\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \left\{\begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=-1-5\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}, \; \forall\lambda\in R}}$$

****

4º) Dado el punto P(1, 0, 0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{cases}$, con λ ε R:

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

b) Calcula la distancia de P a r.

----

a)

Un vector director de la recta r $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 0)$.

El haz de planos paralelos β perpendiculares a la recta r viene dado por la ecuación general $\beta \equiv 2x + y + D = 0$.

De los infinitos planos que constituyen el haz β, el plano α que contiene al punto P(1, 0, 0) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 2x + y + D = 0 \\ P(1,\ 0,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \underline{\alpha \equiv 2x + y - 2 = 0}.$$

La intersección de la recta r con el plano π determinan el punto Q, que es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{cases} \\ \alpha \equiv 2x + y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot (2\lambda) + (3 + \lambda) - 2 = 0\ ;;\ 5\lambda + 1 = 0\ ;;\ \underline{\lambda = -\frac{1}{5}} \Rightarrow \underline{Q\left(-\frac{2}{5},\ \frac{14}{5},\ -1\right)}.$$

Los puntos P y Q determinan un vector que es linealmente dependiente del vector director de la recta s pedida:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(-\frac{2}{5},\ \frac{14}{5},\ -1\right) - (1,\ 0,\ 0) = \left(-\frac{7}{5},\ \frac{14}{5},\ -1\right).$$

Un vector director de la recta s puede ser, por ejemplo, $\overrightarrow{v_s} = (7,\ -14,\ 5)$.

La expresión de la recta r expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1 + 7\lambda \\ y = -14\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}}}$$

b)

La distancia de la recta r al punto P es $d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$, siendo A(0, 3, -1) un punto de r y $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 0)$ un vector director de la recta r.

$\overrightarrow{AP} = P - A = (1, 0, 0) - (0, 3, -1) = (1, -3, 1)$.

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|2j + k + 6k - i|}{\sqrt{4 + 1 + 0}} = \frac{|-i + 2j + 7k|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 4 + 49}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3^3}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}.$$

$$\underline{\underline{d(P, r) = \frac{3\sqrt{30}}{5} \ unidades}}$$

De otra forma:

La distancia del punto P a la recta r es la misma que la distancia entre los puntos P y Q, o sea, es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, -1\right)$.

$$d(P, s) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{49}{25} + \frac{196}{25} + \frac{25}{25}} = \frac{\sqrt{270}}{5} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{30}}{5} \ unidades}}.$$

****